

# PROGETTO DI ECCELLENZA 2014

## PERCORSI INNOVATIVI in Matematica e in Fisica

Conferenze



UNIVERSITÀ  
CATTOLICA  
del Sacro Cuore



# Introduzione alla Meccanica Quantistica

**Fausto Borgonovi**

Dipartimento di Matematica e Fisica e i.L.A.M.P.

Università Cattolica, via Musei 41 , BRESCIA

Istituto Nazionale di Fisica Nucleare, PAVIA

[fausto.borgonovi@unicatt.it](mailto:fausto.borgonovi@unicatt.it)

[http://docenti.unicatt.it/ita/Fausto\\_Borgonovi/](http://docenti.unicatt.it/ita/Fausto_Borgonovi/)

# Meccanica del punto e Teoria Ondulatoria

Vi sono fenomeni descritti in modo esauriente con la Meccanica del punto (le leggi della dinamica di Newton-Galileo) : dal moto di piccoli oggetti materiali (caduta gravi, proiettili...) al moto di corpi celesti (tramite la legge di attrazione universale di Newton).

Altri fenomeni come la diffrazione della luce da una fenditura o il fenomeno dell'interferenza della luce attraverso due fenditure sono descritte da un altro tipo di teoria detta ondulatoria (suono, luce, onde elastiche...)

**I due mondi sono separati !**

## Meccanica del punto

Un punto é descritto da una posizione  $\vec{x}$  rispetto ad un sistema di coordinate  $XYZ$  al tempo  $t$ . La sua evoluzione temporale é univocamente determinata, nel tempo, conoscendo la forza che agisce sul punto oltre che alla sua posizione e velocità ad un certo istante iniziale  $t_0$

**Il moto é perfettamente deterministico**

In termini matematici si ha che

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} \quad \Rightarrow \quad \vec{x}(t) = \dots$$

Questo fece dire a Laplace che l'intero universo si muove in modo

perfettamente deterministico. L'unico ruolo di Dio é quello del grande orologiaio che, una volta costruito il suo meccanismo lo osserva muoversi perfettamente.



## Teoria Ondulatoria

Un'onda é descritta da una funzione d'onda  $\psi(\vec{x}, t)$  che é funzione sia della posizione  $\vec{x}$  che del tempo  $t$ .

Quando si getta un sasso nello stagno si vedono cerchi concentrici al punto ove é stato gettato propagare lungo il pelo dell'acqua in direzione radiale. Allo stesso tempo un galleggiante posto ad una certa distanza dal centro si muove periodicamente in direzione ortogonale alla superficie dell'acqua. Inoltre il moto é periodico sia nello spazio (ad ogni tempo fissato) che nel tempo (in ogni punto fissato).

Una equazione che descrive l'evoluzione della funzione d'onda (ovvero della perturbazione subita dall'acqua) e' l'equazione delle onde:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

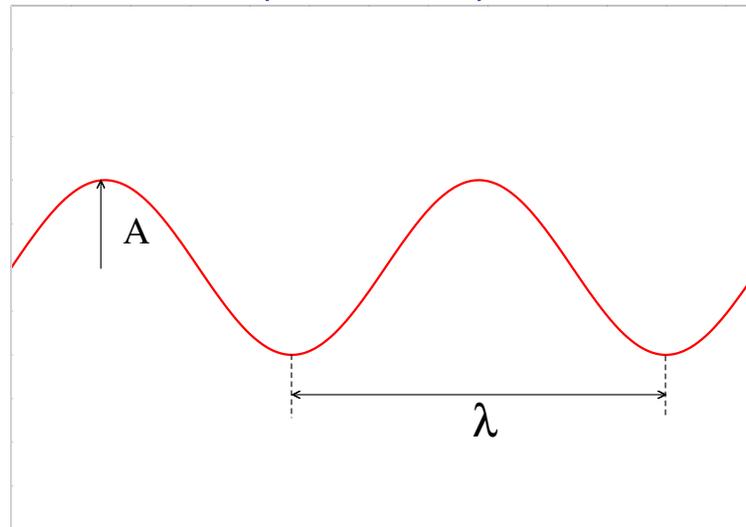
$v$  é la velocità dell'onda.

Una particolare soluzione dell'equazione delle onde (onda piana monocromatica) é

$$\psi(x, t) = A \cos(kx - \omega t)$$

ove

- $A$  é l'ampiezza dell'onda,
- $\lambda = 2\pi/k$  la lunghezza dell'onda, ovvero la distanza spaziale tra due massimi (o minimi),
- $T = 2\pi/\omega$  il periodo dell'onda, ovvero il tempo che intercorre nello stesso punto tra due massimi (o minimi) dell'onda.



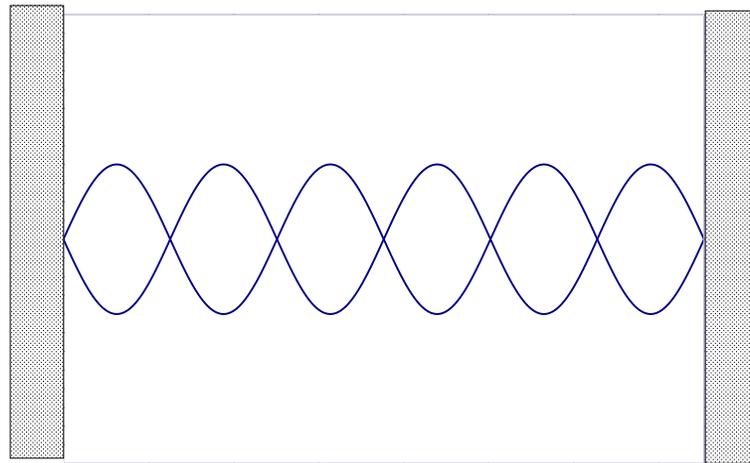
Inoltre si ha che la velocità dell'onda é semplicemente legata alla sua lunghezza d'onda e alla sua frequenza (nel caso delle onde luminose  $v = c \simeq 300.000.000 \text{ m/s}$ ):

$$v = \lambda \nu$$

- Onde luminose di particolare frequenza corrispondono a diversi colori.
- Onde stazionarie : una corda i cui estremi sono fissati, se pizzicata

produrrá onde stazionarie allorquando

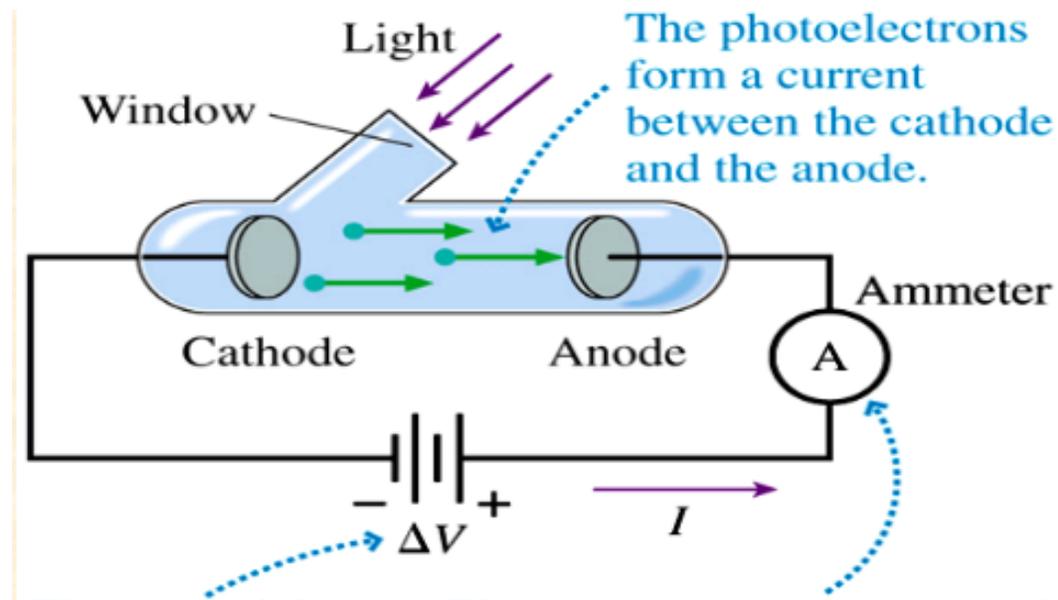
$$L = n \frac{\lambda}{2}$$



ma...

# Effetto fotoelettrico

Una superficie metallica, quando illuminata con radiazione luminosa di un certo colore emette elettroni.



# Caratteristiche dell'emissione fotoelettrica

- Aumentando l'intensità della radiazione luminosa aumenta l'intensità di corrente.
- Aumentando la frequenza della radiazione incidente aumenta, in generale la corrente osservata.
- Esiste, per ogni materiale (catodo) una frequenza minima  $\nu_0$  al di sotto della quale non si ha passaggio di corrente.
- L'emissione fotoelettrica avviene istantaneamente, anche per intensità luminose estremamente basse

## Interpretazione classica

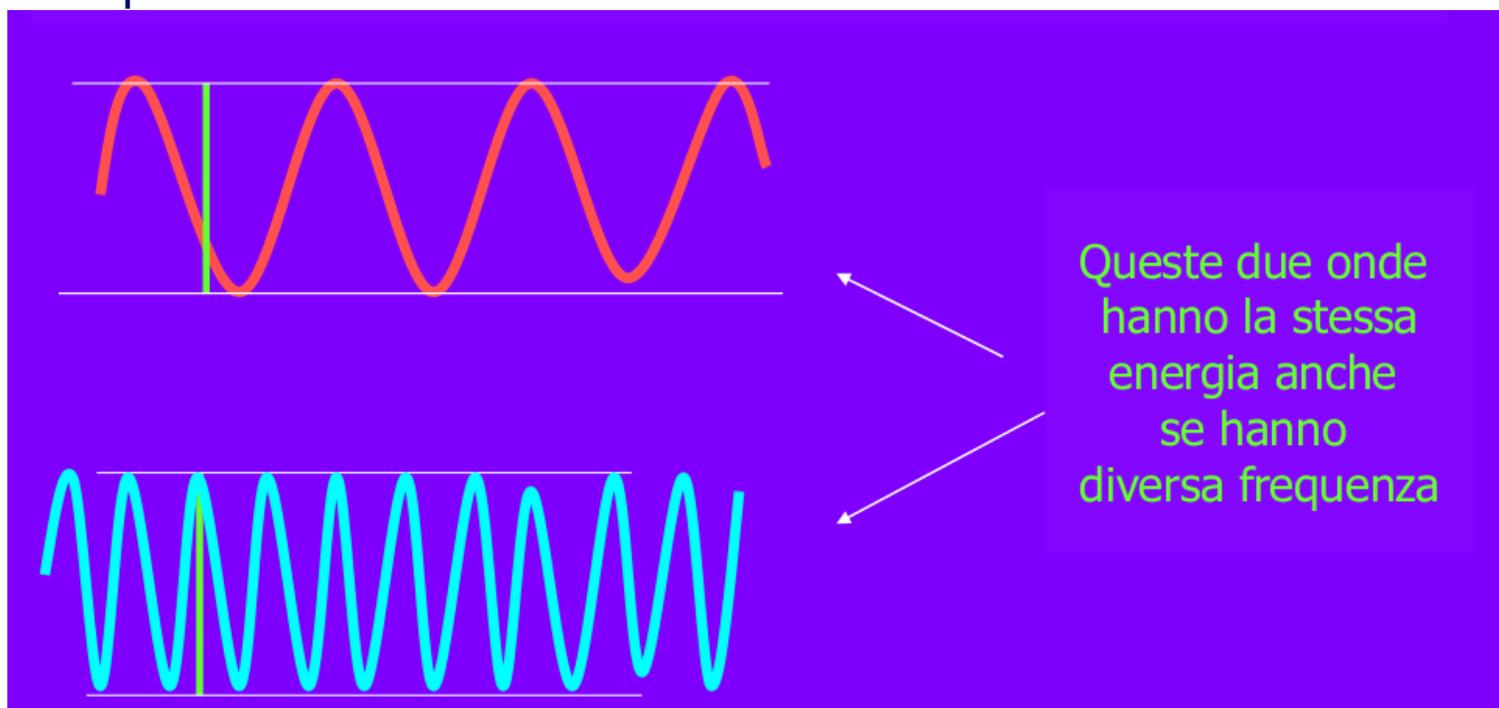
L'intensità luminosa é proporzionale al quadrato dell'ampiezza dell'onda (che nel caso in esame é il campo elettrico associato).

$$I \propto \langle E^2 \rangle$$

Un'onda luminosa trasporta con sé una energia per unità di volume

$$w \propto E^2$$

che si suppone distribuita con continuità nello spazio e che non dipende dalla frequenza.



La radiazione elettromagnetica cede la propria energia agli elettroni del metallo che colpisce. Quando gli elettroni avranno accumulato

sufficiente energia per uguagliare il lavoro di estrazione del metallo si ha emissione e quindi passaggio di corrente.

Questo non spiega :

- 1) l'istantaneità dell'emissione
- 2) la dipendenza dell'emissione dal colore (frequenza) dell'onda incidente

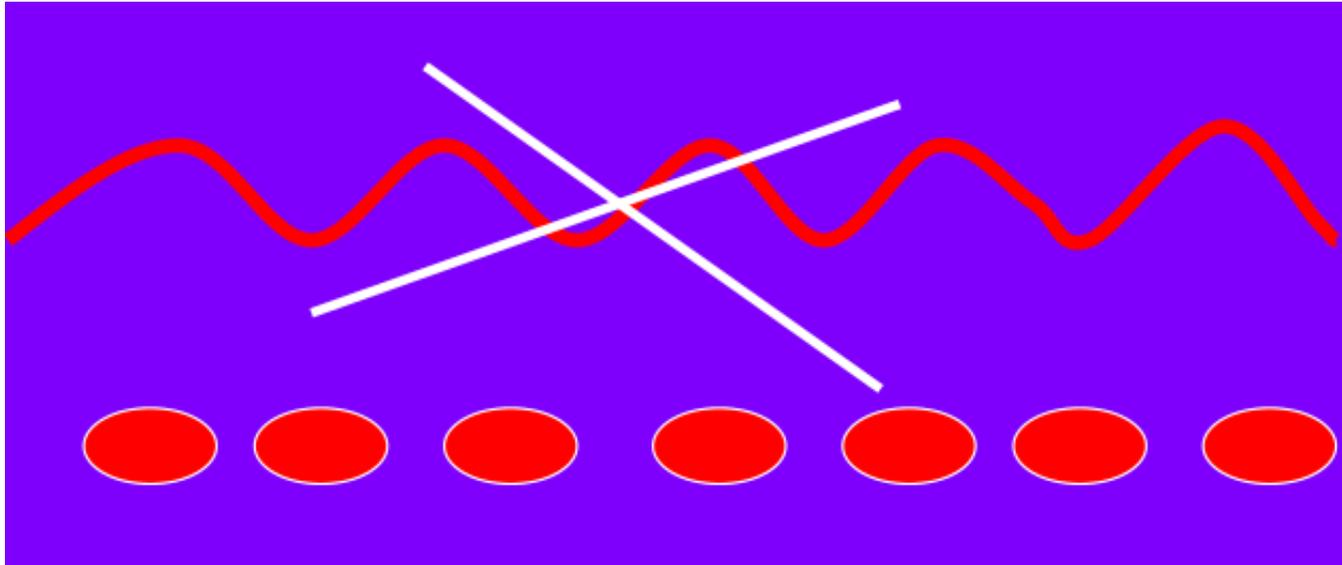
# Interpretazione di Einstein

La radiazione luminosa e' costituita da **quanti** o fotoni (particelle di luce) la cui energia é proporzionale alla frequenza:

$$E = h\nu$$

Questo spiega, oltre ad altre importanti caratteristiche quantitative, i punti 1) e 2).

Aumentare l'intensità della radiazione luminosa significa semplicemente aumentare il numero dei fotoni.



*"Secondo l'ipotesi che voglio qui proporre, quando un raggio di luce si espande partendo da un punto, l'energia non si distribuisce su volumi sempre più grandi, bensì rimane costituita da un numero finito di quanti di energia localizzati nello spazio, che si muovono senza suddividersi e che non possono essere assorbiti o emessi parzialmente."*

L'ipotesi corpuscolare spiega in modo completo ed esauriente l'effetto fotoelettrico, cosa che la teoria ondulatoria non riesce a fare

D'altra parte, sappiamo anche che la luce presenta indiscusse caratteristiche ondulatorie, (interferenza e diffrazione) che un modello corpuscolare non riesce a spiegare in modo altrettanto semplice ed esauriente.

Si decide di affiancare alla descrizione della radiazione luminosa entrambi i modelli, corpuscolare ed ondulatorio, affermando che esistono esperimenti che mettono in "luce" un carattere, piuttosto che un altro:

**DUALISMO ONDA-CORPUSCOLO**

# Dualismo onda-corpuscolo nella materia

Accettato per buono che la radiazione luminosa si comporti in modo bizzarro cosa ne é della materia vera e propria, la descrizione della quale sembra essere puro dominio della teoria corpuscolare?

In effetti la teoria corpuscolare di Newton-Galileo-Laplace presenta una inconsistenza **ab initio**:

Si postula la sua validitá per il punto materiale, ovvero un oggetto senza dimensioni, infinitamente piccolo e dopodiché la si estende a grandi aggregati di punti (palla da tennis o pianeta) sui quali é stata verificata sperimentalmente con grande precisione.

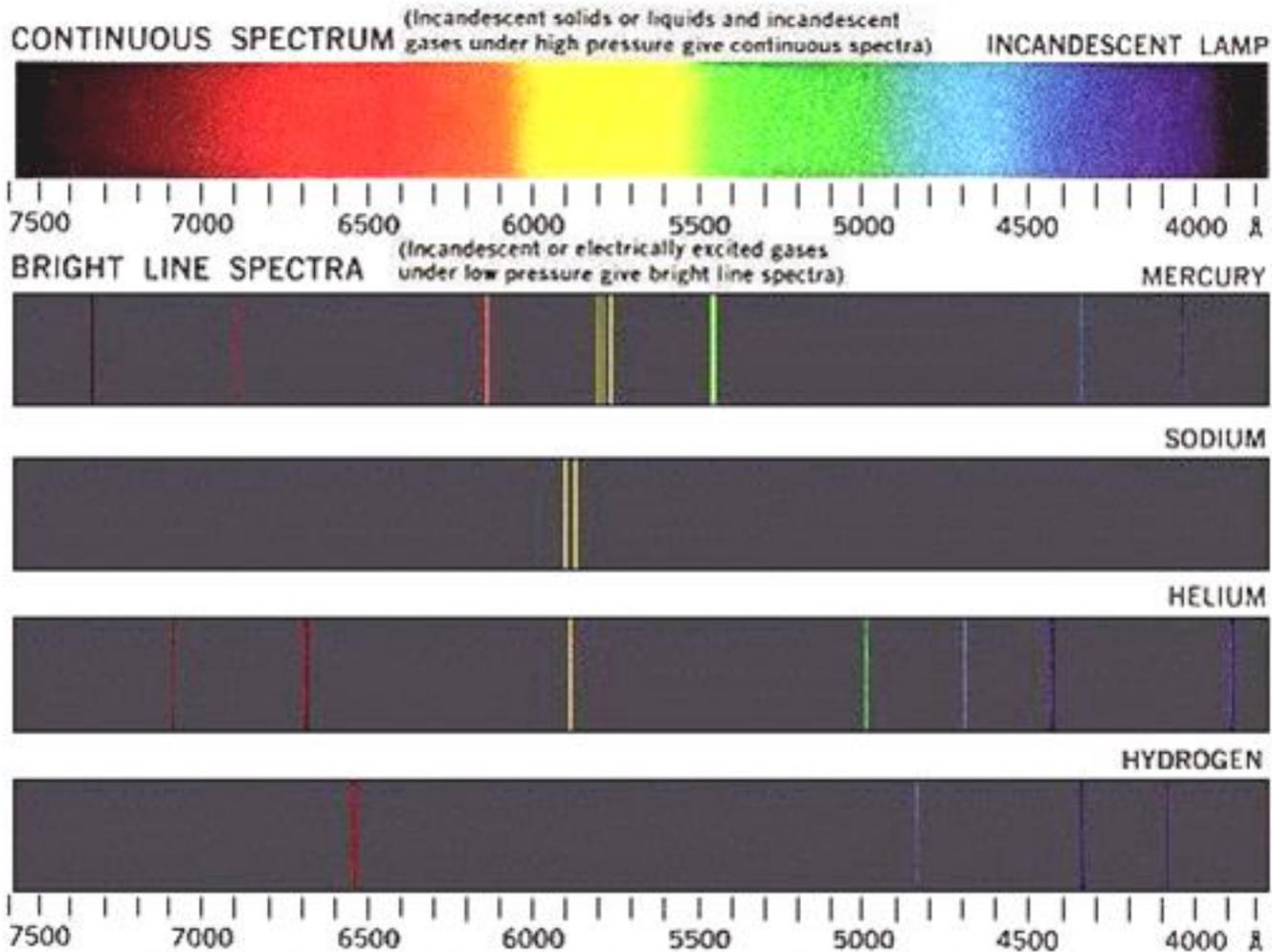
**Ma, vale per oggetti molto piú piccoli, come l'elettrone e il protone?**

# Nubi all'orizzonte

Le nubi all'orizzonte sono rappresentate da

- Gli spettri atomici di emissione
- l'interferenza di elettroni nel passaggio tra due fenditure

## EMISSION SPECTRA



# Gli spettri atomici di emissione

Una sostanza atomica se eccitata opportunamente emette radiazione elettromagnetica di particolare frequenza  $\Rightarrow$  **gli spettri atomici**.

Queste frequenze non sono casuali ma seguono relazioni ben precise, ad esempio la **legge di Balmer** (atomo di idrogeno).

$$\lambda_{n_1, n_2} = h \frac{n_2^2}{n_2^2 - n_1^2}$$

ove  $n_1, n_2$  sono numeri interi ed  $h$  una costante opportuna.

Il sistema fisico **classico** che può emettere radiazione monocromatica è l'oscillatore armonico (pendolo).

Bisogna allora supporre che entro l'atomo vi siano infiniti oscillatori armonici, ognuno di una particolare frequenza  $\nu$  (o lunghezza d'onda  $\lambda$ , la relazione tra i due é infatti data da  $\lambda\nu = v$ , e  $v$  é la velocità di propagazione nel mezzo).

Opportunamente eccitati, tali oscillatori possono emettere radiazioni monocromatiche di frequenza pari alla frequenza propria di vibrazione.

Purtuttavia anche l'atomo piú semplice (l'idrogeno : una carica elettrica positiva ed una negativa di ugual valore in modulo) non ammette tale schematizzazione .

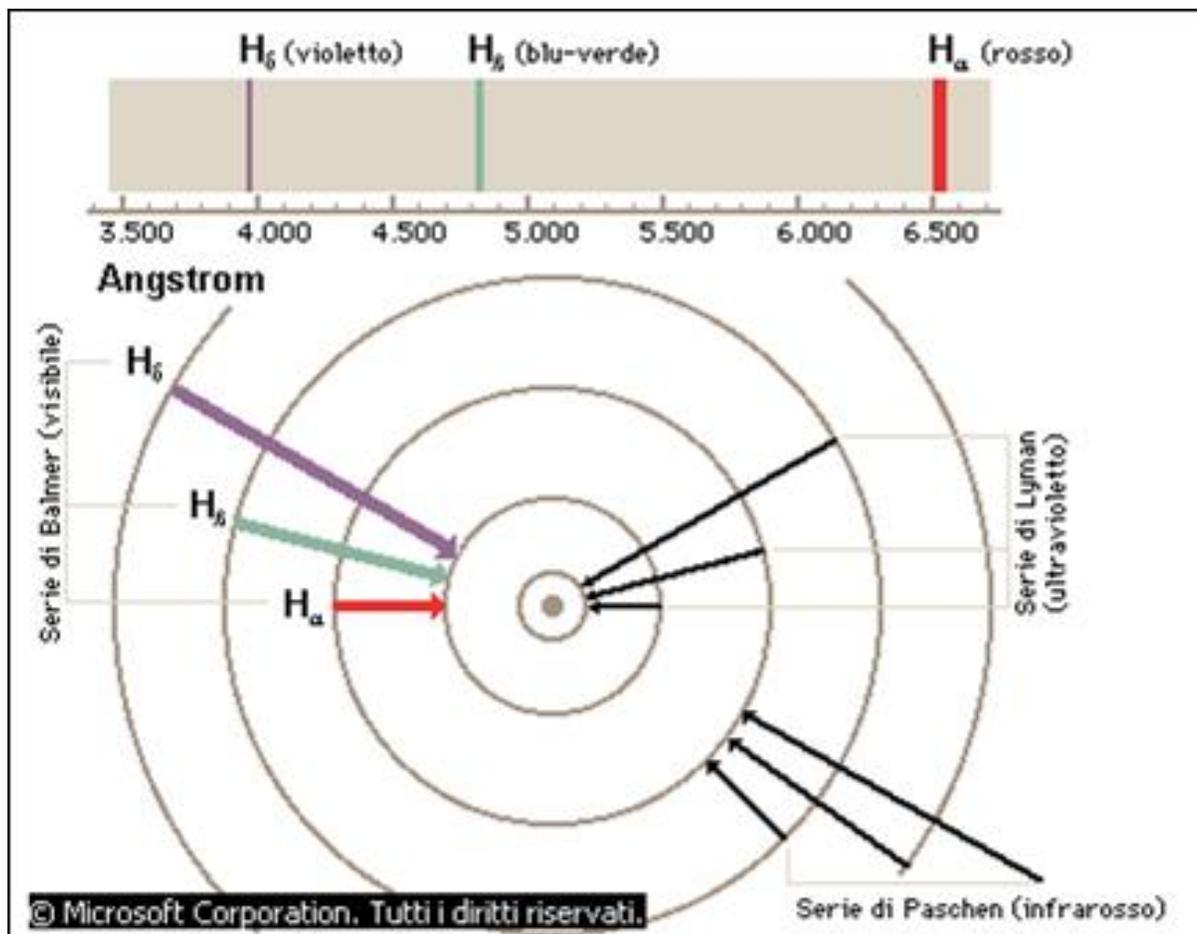
**Perché l'elettrone vibra con tante frequenze discrete invece che con un continuo ?**

## Il modello planetario di Bohr

Corrisponde alla possibilità di trasferire le nostre conoscenze dell'infinitamente grande (la teoria della gravitazione universale di Newton), nell'infinitamente piccolo. Ciò si basa sulla possibilità di utilizzo della forza di attrazione Coulombiana tra le cariche, del tutto simile a quella di attrazione tra le masse, come meccanismo che permetta la stabilità delle orbite. In entrambi i casi infatti si ha che

$$F_{Coulomb} \propto \frac{m_1 m_2}{R_{12}^2} \propto \frac{q_1 q_2}{R_{12}^2}$$

Ma la natura é piú complicata



# I livelli discreti delle energie

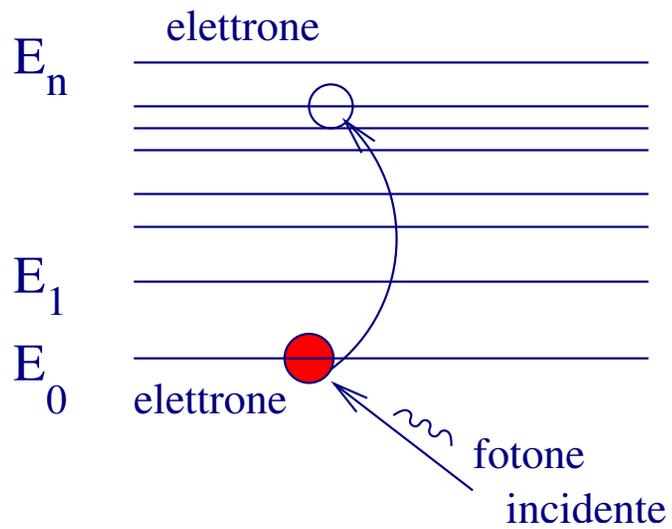
Supponiamo che per qualche motivo misterioso gli elettroni possano muoversi esclusivamente su "binari" a energia definita senza irraggiare.

Questo costituisce una vera e propria crisi della fisica classica : le leggi che conosciamo e che sono valide per gli oggetti che ci circondano non valgono su scala atomica.

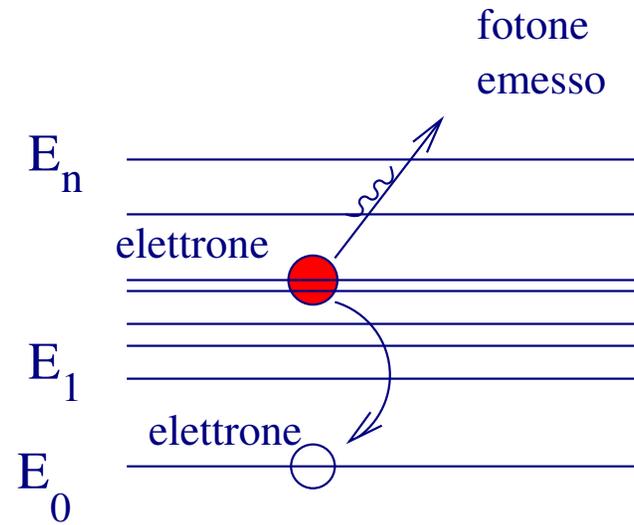
Come si interpretano allora i meccanismi di emissione ed assorbimento?

$$\Delta E = h \nu$$

### Assorbimento



### Emissione



Le righe spettrali sono dunque una marcatura dei livelli discreti di energia. Imponendo che il momento angolare sia quantizzato (orbite stazionarie)

$$L = Rv = R\frac{h}{\lambda} = n\frac{h}{2\pi}$$

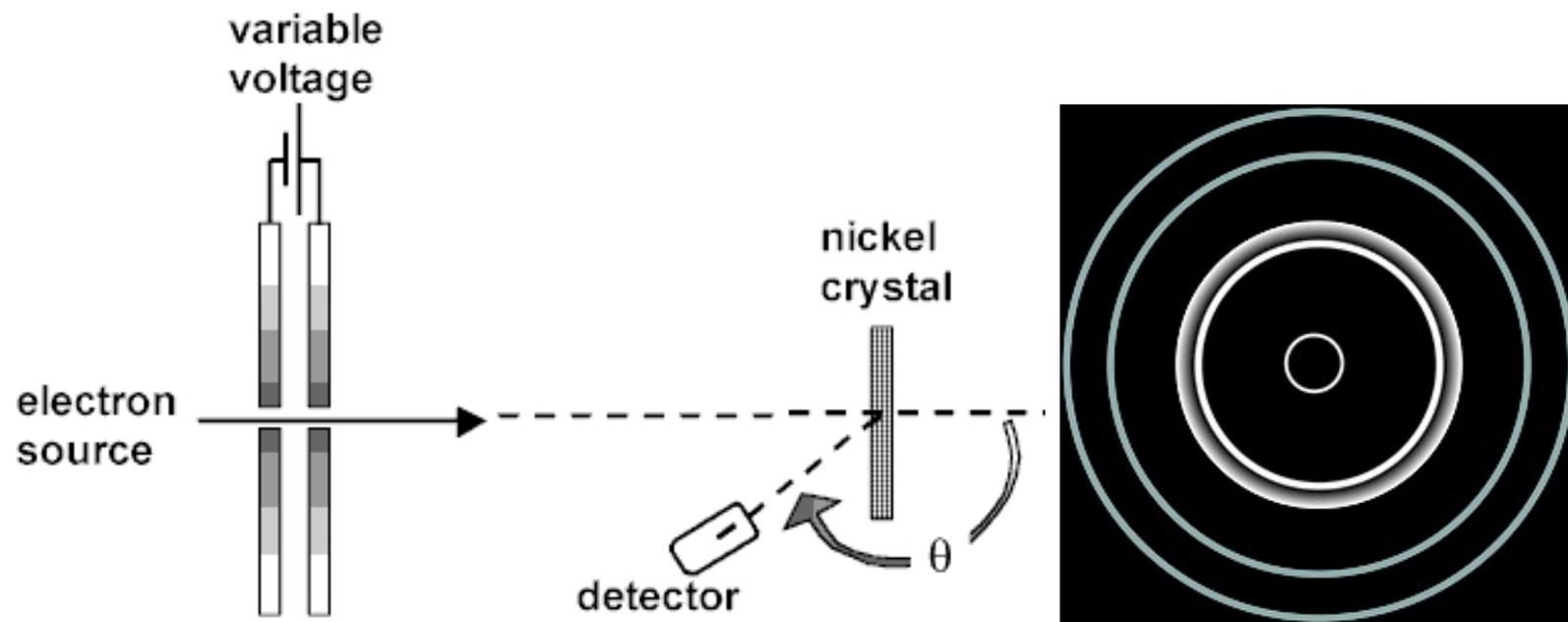
(per il moto circolare uniforme) e che la forza di attrazione elettrone-protone sia quella di Coulomb, Bohr riuscì a ricavare la sequenza delle righe spettrali e la costante  $h$  in termini di costanti fondamentali.

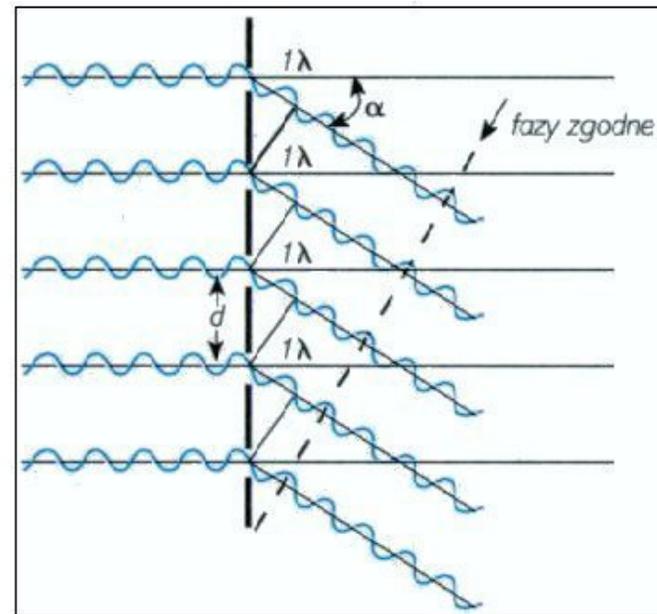
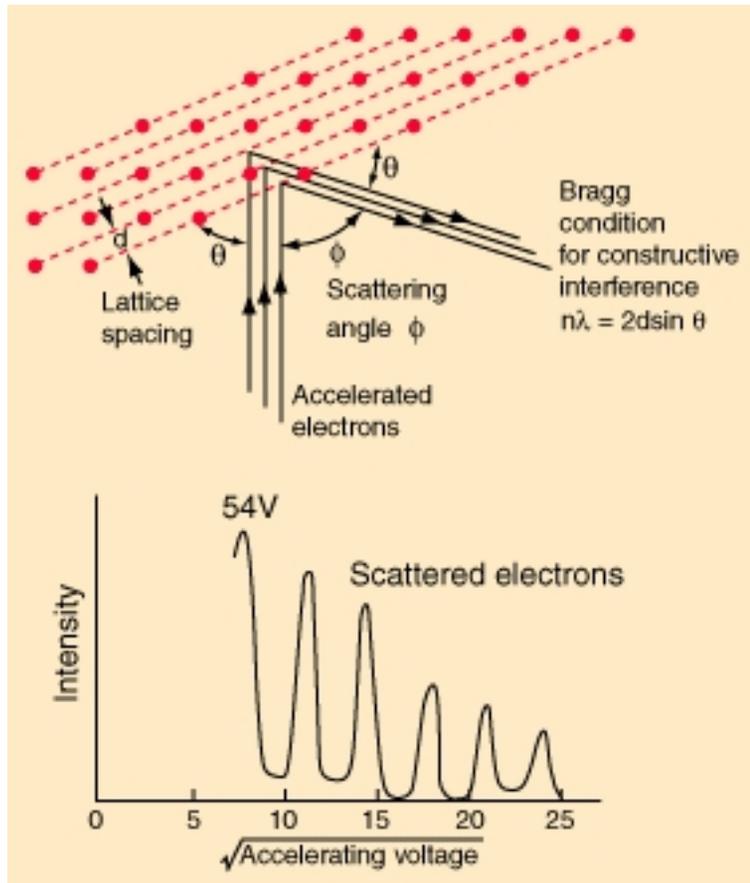
**Ma cosa significavano tutte quelle assunzioni?**

# Carattere ondulatorio della materia

- Esperienza di Thomson (1927) : un fascio di elettroni viene fatto incidere sopra un film di materiale cristallino e poi fatto collidere su uno schermo fotografico. La figura (di diffrazione) che si ottiene é simile a quella utilizzando i raggi X (che sono un particolare tipo di radiazione elettromagnetica).
- Davisson- Germer (1927) Diffrazione di Bragg di elettroni (e neutroni) su un cristallo

**La materia si comporta come una onda !**





The diffraction grating and spectrum on screen  
 $d$  grating constant,  $\lambda$  wave length,  $\alpha$  angle of deflection,

# L'ipotesi di De Broglie 1924

Vengono proposte ipotesi di lavoro sconcertanti:

Ad una particella di quantità di moto  $p$  ed energia  $E$  sono associate una lunghezza d'onda  $\lambda$  ed una frequenza  $\nu$ , date da

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad \nu = \frac{E}{h}$$

La quantizzazione del momento angolare del modello di Bohr si interpreta semplicemente:

da

$$L = pR = n \frac{h}{2\pi}$$

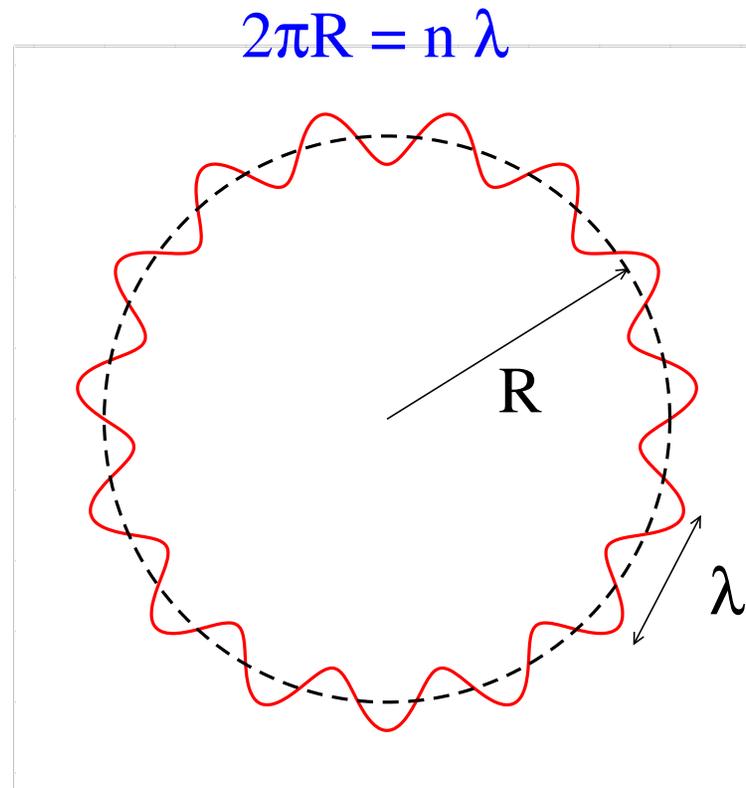
tenendo conto che

$$p = \frac{h}{\lambda}$$

si ottiene

$$2\pi R = n\lambda$$

ovvero l'orbita circolare deve contenere un numero intero di lunghezze d'onda come le onde stazionarie prodotte da una corda con gli estremi fissi.



# Dualismo Onda-Corpuscolo

Ne concludiamo che anche per la materia:

Esistono esperimenti volti a mettere in luce il carattere ondulatorio (interferenza, diffrazione e coinvolgenti il microcosmo), altri volti a mettere in luce l'aspetto corpuscolare (tutti gli esperimenti di meccanica sul macrocosmo).

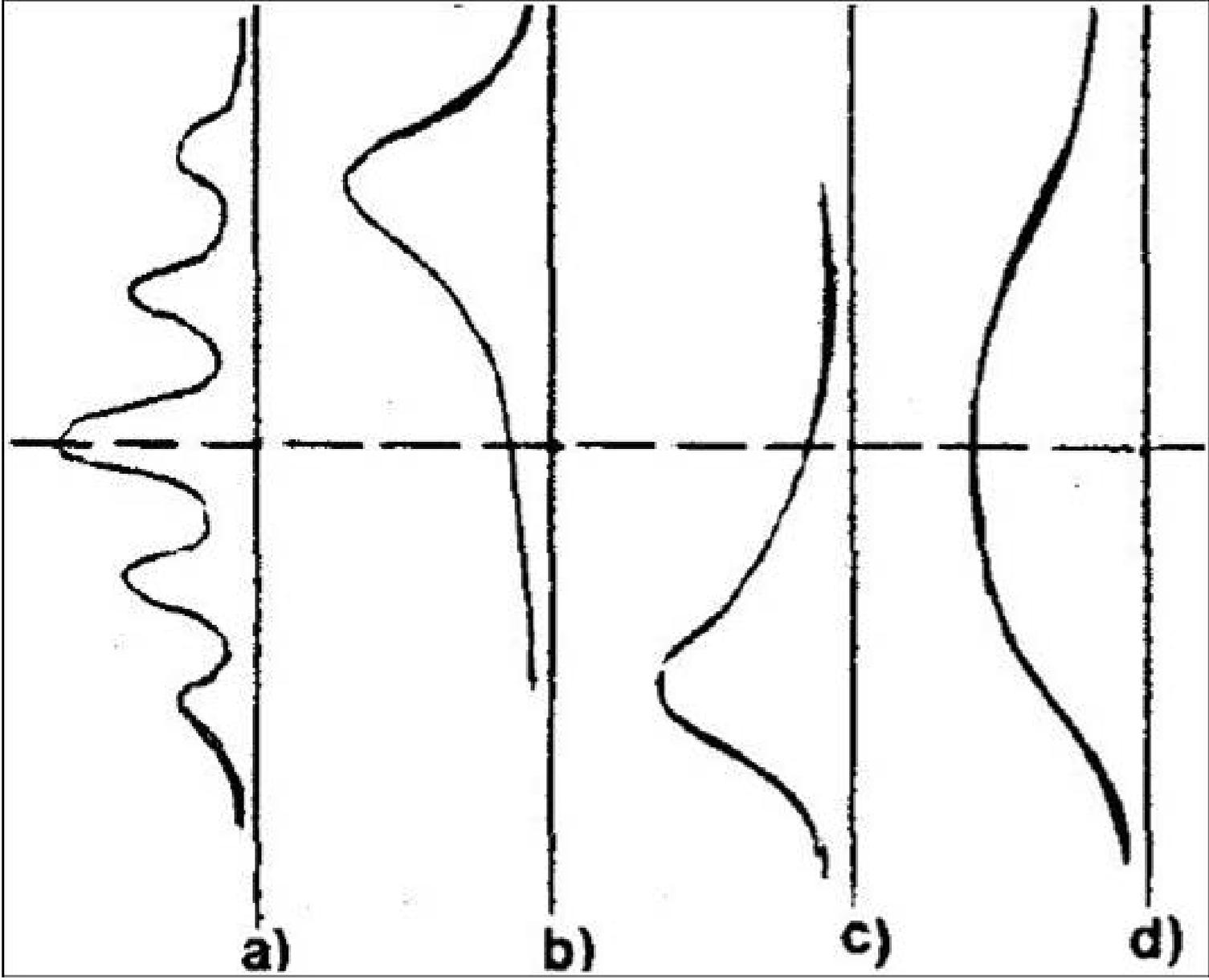
Si osservi che viene introdotta una divisione tra **micro** e **macro**.

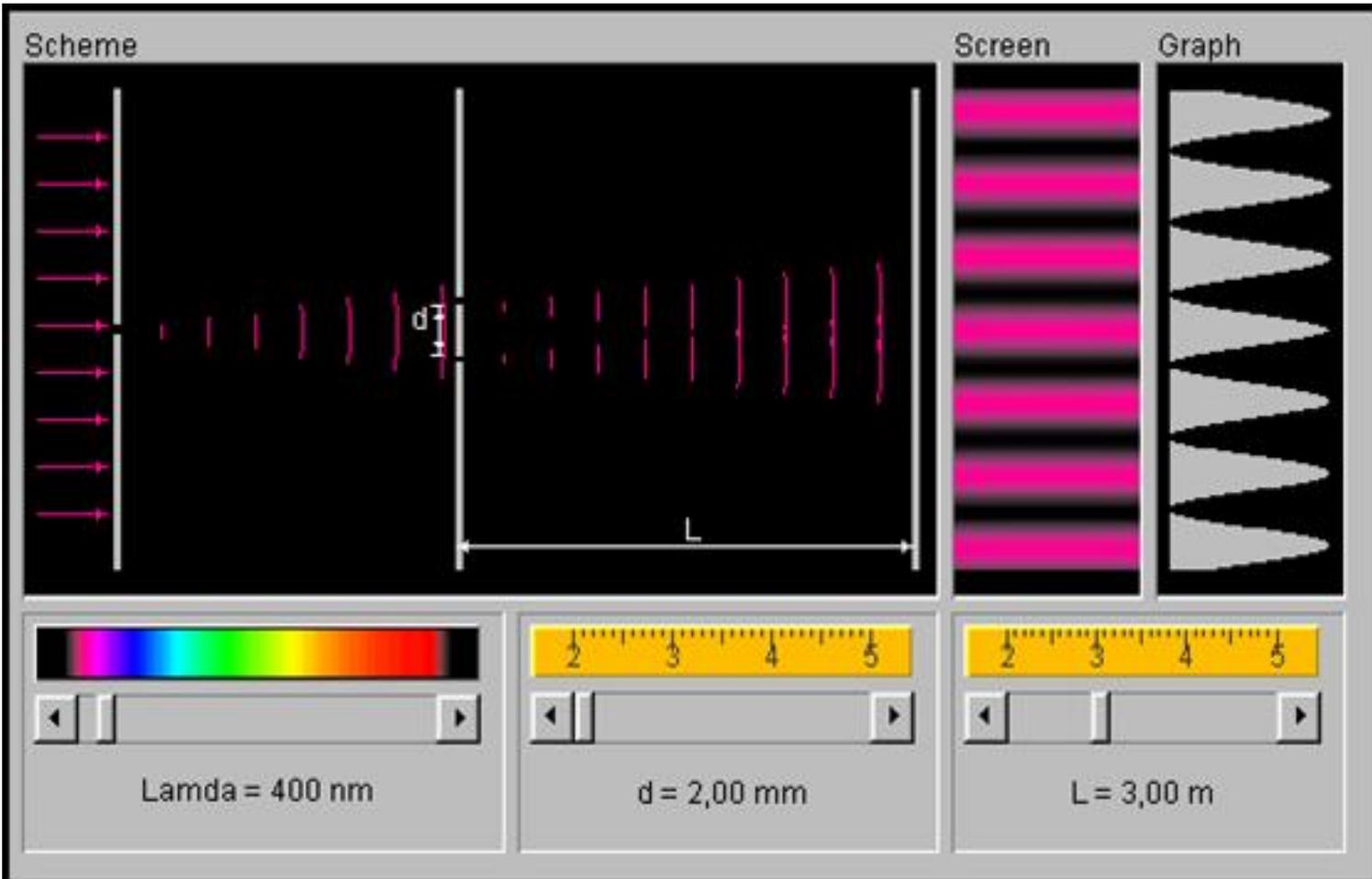
Non sar  forse che occorre costruire un'altra meccanica per gli oggetti piccoli?

# Riassunto delle puntate precedenti

- Doppia natura onda–corpuscolo per la luce
- Doppia natura onda–corpuscolo per la materia

Ne concludiamo che se facciamo passare elettroni singolarmente (uno per volta) attraverso una fenditura ognuno di loro interferisce con se stesso se non lo riveliamo (dando luogo ad una figura di interferenza), mentre, se poniamo un rivelatore su una fenditura che ne rivela il passaggio (e quindi sappiamo da che fenditura é passato) distruggiamo il fenomeno di interferenza e ne riveliamo l'aspetto corpuscolare (postulato di riduzione del pacchetto).





## Qual é allora il ruolo dell'apparato di misura?

La misura *localizza* l'elettrone o il fotone e lo *costringe* a comportarsi come una particella.

## E' possibile ignorare l'interazione con l'apparato di misura?

No, per localizzare una cosa devo vederla, ovvero farla interagire con qualche tipo di radiazione elettromagnetica (fotoni). Ciò modifica in modo essenziale il comportamento. Questo é alla base del principio di indeterminazione di Heisenberg. Ma prima.....

## Discorso su modello

Entrambi i modelli vanno bene, nel senso che offrono una descrizione quantitativa corretta e dettagliata di specifiche situazioni sperimentali,

Entrambi i modelli presentano delle lacune ed evidenti storpiature se si

cercano di estrapolare ad una qualsiasi situazione sperimentale.

Si potrebbe concludere che:

- O il modello non va bene, nel senso che ne occorre uno piú generale, che descriva esattamente le proprietá oggettive della materia (Einstein)
- Oppure si rinuncia al modello stesso, nel senso che non é compito della fisica sapere cosa é l'elettrone ma solo come fornire delle previsioni dettagliate sul suo comportamento (interpretazione di Copenaghen)

La storia passata ha visto il prevalere del secondo punto vista nella versione piú ortodossa (negando talvolta la realtá oggettiva stessa).

La posizione moderna é piú fluida....

# Il principio di indeterminazione di Heisenberg

Classicamente é possibile, in linea di principio (compatibilmente con gli errori dovuti alle misure sperimentali) assegnare la posizione  $x$  e la velocità  $v$  (anzi meglio la sua quantità di moto  $p = mv$ , d'ora in poi detta momento), con arbitraria precisione rispettivamente date da  $\Delta x$  e  $\Delta p$ .

In particolare non vi é limite alcuno, sempre compatibilmente con gli errori di misura, ad una misura **simultanea** di momento e posizione.

## In Meccanica Quantistica NO

vale infatti sempre che

$$\Delta x \Delta p \geq h \quad \text{costante di Planck}$$

$x$  e  $p$  sono dette, per tale motivo, variabili **incompatibili**.

Quali sono le conseguenze del principio di indeterminazione di Heisenberg?

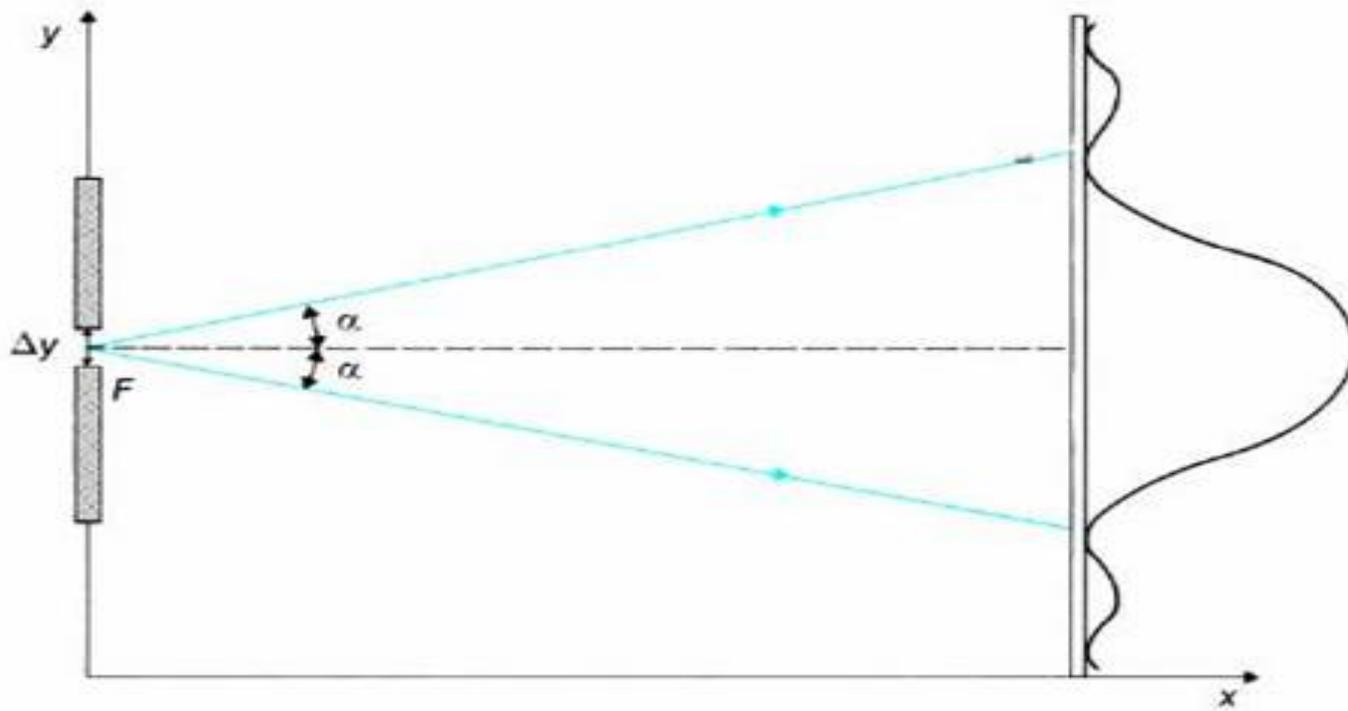
Tanto piú cerchiamo di misurare la posizione di una particella con grande precisione

$$\Delta x \rightarrow 0,$$

tanto meno conosciamo la sua velocità

$$\Delta p = \frac{h}{\Delta x} \rightarrow \infty$$

e viceversa.



## Diffrazione da una fenditura

Siccome non sappiamo da quale punto della fenditura il fotone (o l'elettrone) è passato, si ha una indeterminazione sulla posizione lungo  $y$ .

$$\Delta y \simeq d$$

L'onda risulta inoltre diffratta entro un angolo  $\alpha$ , che se consideriamo essere il primo minimo centrale, è dato da :

$$\sin \alpha_0 \simeq \frac{\lambda}{d}$$

Allora, poiché  $p_y = p \sin \alpha$ , si ha al minimo

$$\Delta p_y = p \sin \alpha_0$$

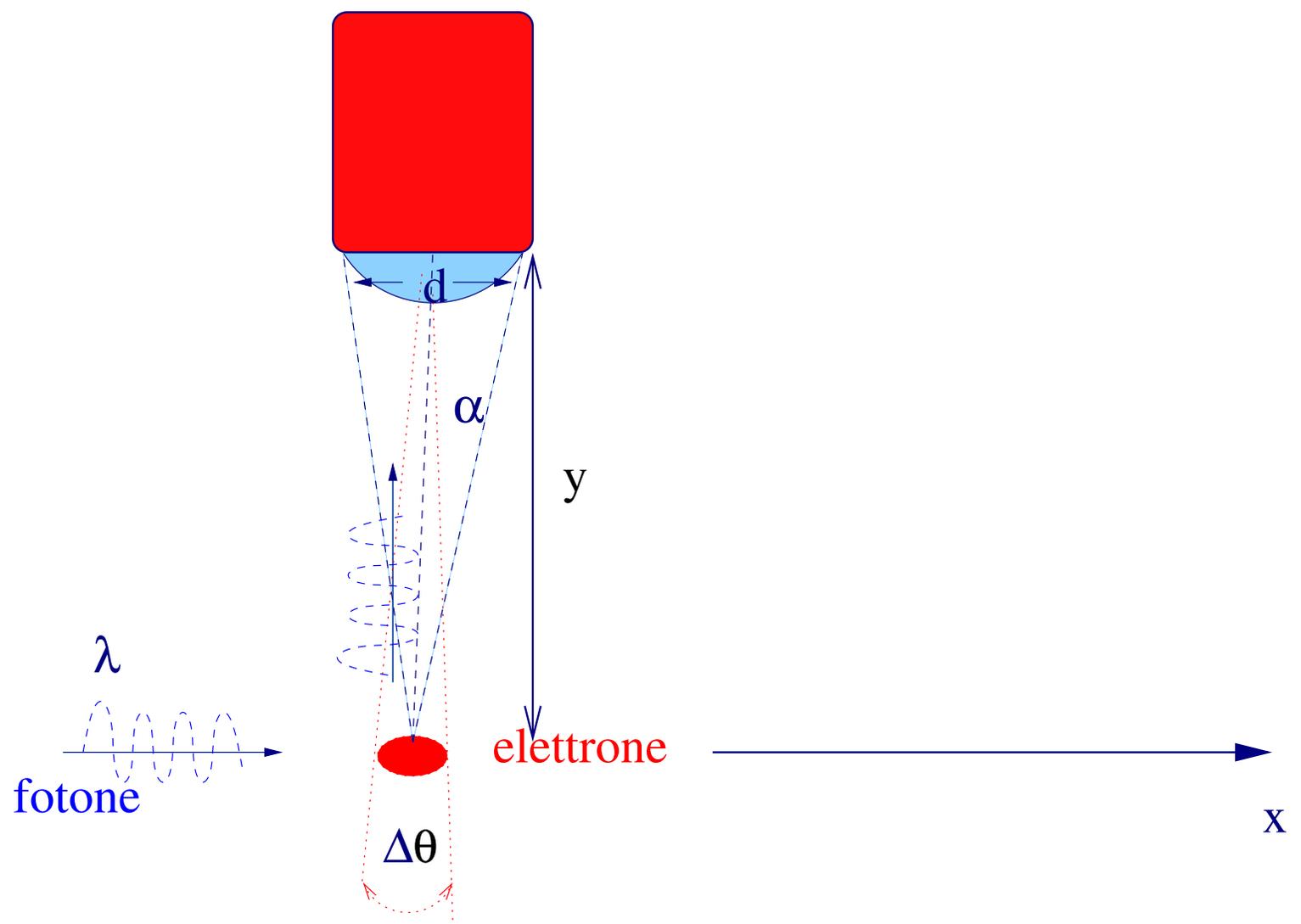
da cui, al meglio

$$\Delta y \Delta p_y = d p \frac{\lambda}{d} = \frac{h}{\lambda} \lambda = h$$

dove si é fatto uso della relazione di De Broglie tra il momento  $p$  di una particella e la sua lunghezza d'onda associata  $\lambda$ .

La cosa é del tutto generale : per sapere dov'è una particella la devo osservare, ovvero la devo fare interagire con la radiazione elettromagnetica (fotoni). L'interazione radiazione-materia é essenziale nel processo di misura, come lo é il processo di misura stesso all'interno della teoria.

microscopio



# Localizzazione di un elettrone tramite microscopio

Per localizzare un elettrone devo illuminarlo, ossia colpirlo con un fotone di momento  $p_{\text{fot}}$  e lunghezza d'onda  $\lambda$  legati tra di loro dalla relazione

$$p_{\text{fot}} = \frac{h}{\lambda}$$

La luce che attraversa il microscopio é quella diffusa dall'elettrone, e per entrare nell'obiettivo il fotone deve muoversi entro un cono di

semiapertura  $\alpha$ . Ne discende che la sua incertezza nel momento sarà data da

$$\Delta p \simeq p_{\text{fot}} \sin \alpha = \frac{h d}{\lambda 2y}$$

Nel processo di scattering fotone-elettrone parte del momento del primo viene trasferito al secondo e  $\Delta p$  risulta anche l'incertezza nella componente  $x$  del momento dell'elettrone.

L'incertezza  $\Delta x$  nella posizione dell'elettrone é a sua volta data dal diametro del disco centrale della figura di diffrazione  $2y \sin \Delta\theta$

Ne discende

$$\Delta x \Delta p = 2y \sin \Delta \theta \frac{h d}{\lambda 2y} = \frac{\lambda h}{d \lambda} d \simeq h$$

Si noti che si può migliorare la stima sulla posizione utilizzando di volta in volta radiazione con una piccola lunghezza d'onda (a scapito dell'incertezza nel momento che diventa arbitrariamente grande), così come si può utilizzare una grande lunghezza d'onda per diminuire il disturbo nel momento (aumentando però l'incertezza nella posizione).

# Cosa sono posizione e velocità di una particella in Meccanica Quantistica?

Una traiettoria definita da una particella classica é una funzione del tempo  $x(t)$ . Possiamo in modo altrettanto esplicito definire classicamente una traiettoria nello spazio delle fasi, associando simultaneamente la sua posizione  $x$  e il suo momento  $p$ .

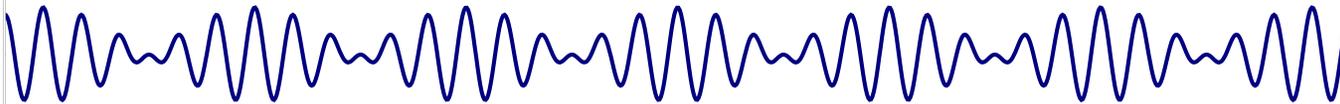
Questo non é possibile in Meccanica Quantistica

Non esiste la traiettoria di una particella microscopica, essendo questa definita da una regione di incertezza. Possiamo al piú parlare di regioni dello spazio dello fasi dove é verosimile trovare la particella. Inoltre  $\Delta x \Delta p$  rappresenta la misura di una area nello spazio delle fasi. Il principio di indeterminazione di Heisenberg impone allora che

non si possa "vedere" entro aree  $h$  dello spazio delle fasi.

## Analogia con l'analisi di Fourier

onda monocromatica  $\lambda$ ,  $\cos kx$ ,  $k = 2\pi/\lambda$



sovrapposizione di onde con diverso numero d'onda  $k_1$  e  $k_2$

$\Delta x$



pacchetto d'onde di estensione spaziale  $\Delta x$

# Analogia con l'analisi di Fourier

Come si fa a localizzare un'onda entro una estensione spaziale  $\Delta x$  ?  
(ovvero quante onde e di quale  $\lambda$  devo sovrapporre?).

La fisica classica mi dice che per descrivere un pacchetto d'onde entro una estensione finita spaziale  $\Delta x$  occorrono infinite onde con numero d'onda tra  $k$  e  $k + \Delta k$  ove

$$\Delta x \Delta k \simeq 2\pi.$$

Poiché  $p = hk/2\pi$  ne discende

$$\frac{h}{2\pi} \Delta x \Delta k \simeq 2\pi \frac{h}{2\pi} \Rightarrow \Delta x \Delta \left( \frac{hk}{2\pi} \right) = \Delta x \Delta p = h$$

## Il mondo dei quanti

La descrizione di Einstein dell'effetto fotoelettrico prevede la schematizzazione della radiazione elettromagnetica in termini di corpuscoli (fotoni) ognuno dei quali *trasporta* una energia che dipende dal proprio colore (frequenza  $\nu$ ) invece che dalla propria ampiezza (quadrata  $|A|^2$ ) come nel caso classico. Ovvero

$$E = h\nu \quad \text{invece che} \quad E \propto |A|^2$$

L'energia risulta in tal modo assumere valori discreti (multipli del **quanto** di energia fondamentale) :

$$E = nh\nu \quad n \text{ numero intero}$$

Questa é una caratteristica del tutto generale!

L'energia nel microcosmo assume solo valori discreti

# La descrizione di Schrodinger

Come ottenere una equazione per le onde di materia, che fornisca i livelli discreti di energia?

Schrodinger ottenne la seguente equazione di evoluzione, un pó per intuito, un pó per fortuna, un pó seguendo il senso fisico (in una dimensione):

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}(x, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}(x, t) + \Psi(x, t)U(x)$$

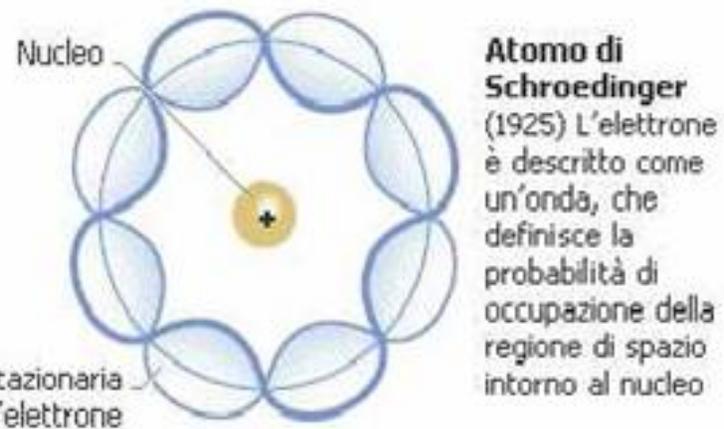
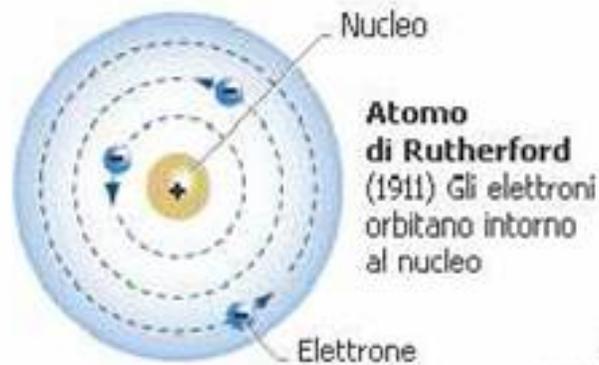
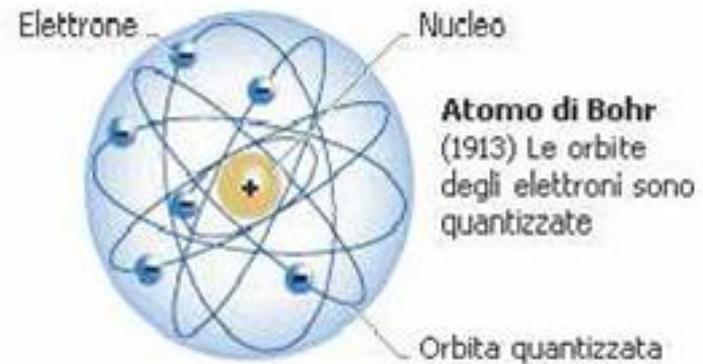
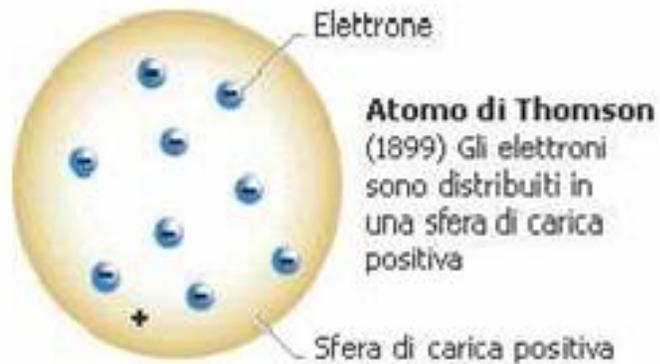
mentre i livelli discreti delle energie si ottengono risolvendo l'equazione agli autovalori per l'operatore a destra, ovvero calcolando i valori

possibili dell'energia  $E$  per cui la seguente equazione ammette soluzioni  $\Psi$  il cui integrale sull'intero spazio sia finito:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}(x) + \Psi(x)U(x) = E\Psi(x)$$

(equazione di Schrodinger agli statti stazionari).

$U(x)$  é il campo di forze a cui é soggetta l'onda di materia (classicamente la sua relazione con la forza é data da  $F = -dU/dx$ ).



## Interpretazione fisica

Nella equazione di Schrodinger  $\Psi$  é una grandezza complessa, l'interpretazione fisica a cui pensava Schrodinger era che il suo modulo quadrato potesse assumere il significato di densità di materia .

**Ma così non é**

Per esempio, per ottenere la figura di interferenza nell'esperimento delle due fenditure si deve considerare

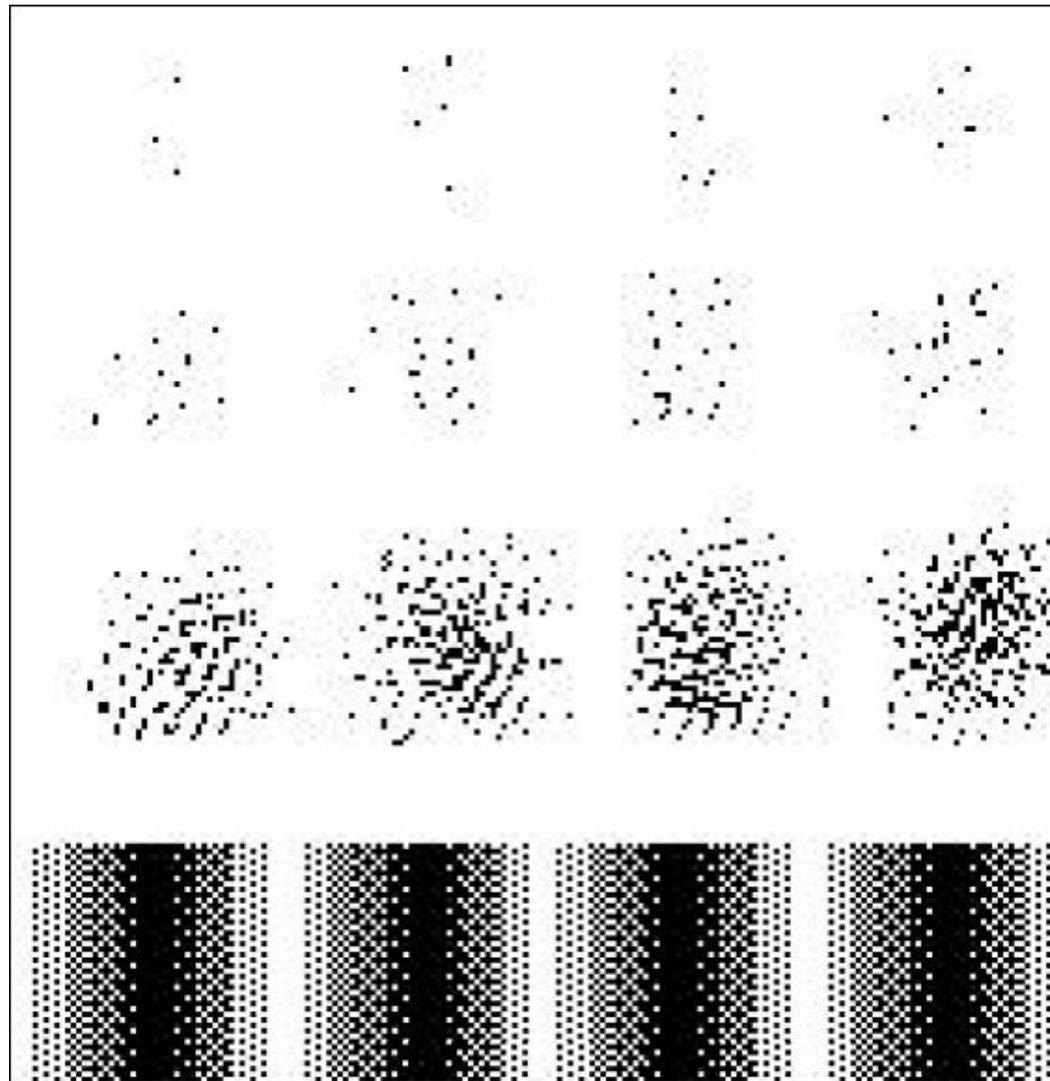
$$|\Psi_{tot}|^2 = |\Psi_1 + \Psi_2|^2 = |\Psi_1|^2 + |\Psi_2|^2 + 2Re(\Psi_1\Psi_2^*)$$

Ed é proprio l'ultimo termine  $2Re(\Psi_1\Psi_2^*)$  che da' il caratteristico termine di interferenza ( i massimi e i minimi sullo schermo )

# Interpretazione di Born

$\Psi$  rappresenta una ampiezza di probabilità, nel senso che

- va sommata alle altre ampiezze di probabilità
- facendone poi il modulo quadrato si ottiene, la densità di probabilità nel punto  $x$ .
- $|\Psi(x)|^2 dx$  va interpretata come la probabilità di ottenere la particella nell'intervallo  $dx$ , centrato attorno a  $x$  per effetto di una misura.



# Osservazioni

- L'equazione di Schrodinger é lineare per cui una combinazione lineare di soluzioni é ancora soluzione (questo per esempio non accadeva con l'equazione di Newton).
- Vi sono due tipi di evoluzioni quantistiche, una deterministica, dettata dall'equazione di Schrodinger (dove tutto é noto o perlomeno ricavabile) ed una improvvisa detta **riduzione del pacchetto** dove entra in gioco l'apparato di misura provocando il collasso della funzione d'onda in uno stato definito.
- Come si concilia il mondo quantistico con quello classico? Ovvero quando bisogna usare la Meccanica Quantistica e quando la Meccanica Classica?.

- Gli apparati di misura entrano in modo determinante nella descrizione della nuova teoria. Bisogna allora descriverli classicamente o quantisticamente?
- La MQ é una teoria probabilistica. Ció é dovuto alla nostra ignoranza o l'ipotesi statistica é irrinunciabile?
- E' possibile che in futuro si possa formulare una teoria che fornisca gli stessi risultati della MQ (che sono in perfetto accordo con gli esperimenti fatti ripetutamente ormai da quasi un secolo) ma che sia perfettamente deterministica?