La nascita di nuova scienza:
dal determinismo al caos

Fausto Borgonovi

Dipartimento di Matematica e Fisica, Universitá Cattolica, Brescia

Istituto Nazionale di Fisica Nucleare, Sezione di Pavia

All'inizio, per prima, fu il Caos, in seguito quindi, la Terra

dal largo petto, dimora sicura per sempre di tutti gli immortali,

che abitano le cime del nevoso Olimpo, ed il Tartaro tenebroso

nei recessi della Terra dalle larghe vie; quindi venne Eros, il piu'

bello tra gli dei immortali, colui che scioglie le membra, che di

tutti gli uomini doma nel petto l'animo ed i saggi consigli.

Dal Caos nacquero l'Erebo e la nera Notte, dalla Notte quindi

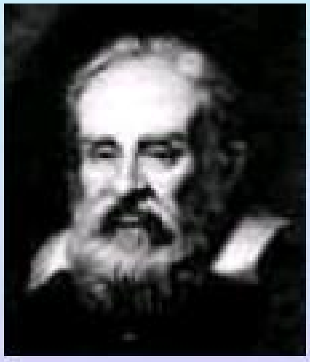
nacque l'Etere ed il Giorno, che ella partori' dopo averli concepiti

unita in amore con l'Erebo.

ESIODO, Teogonia 116–125 (trad. A.Colonna)

- La Fisica e l'importanza dei modelli matematici
- I modelli e la realta'
- Il linguaggio con cui è stata scritta la Natura è la matematica

- Qual è il ruolo del fisico?



Il punto di vista di L.Boltzmann

..." Da questo segue che non può essere nostro scopo trovare una teoria assolutamente corretta, ma piuttosto lo scenario più semplice che meglio interpreta gli esperimenti.

Si puó addirittura pensare alla possibilità di avere due teorie completamente diverse, entrambi egualmente semplici e vicine ai risultati sperimentali, che, sebbene differenti, siano entrambi corrette....

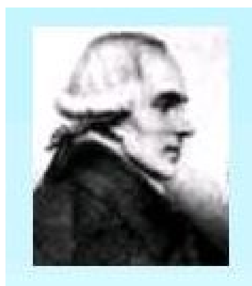
La Meccanica Newtoniana

Un sistema classico di N particelle interagenti tra loro con una certa forza F evolve in accordo con le leggi della dinamica di Newton:

$$\vec{F}_i = m_i \vec{a}_i = m_i \frac{d^2}{dt^2} \vec{x}_i.$$

Questo significa che supponendo note le interazioni tra le particelle e date le condizioni iniziali sulle posizioni e sulle velocitá il moto é univocamente determinato. (Dal punto di vista matematico, ció deriva dai teoremi di esistenza e unicitá per i sistemi di equazioni differenziali del secondo ordine.)

Sogno deterministico di Laplace.



Come puó esserci caos in un mondo deterministico?

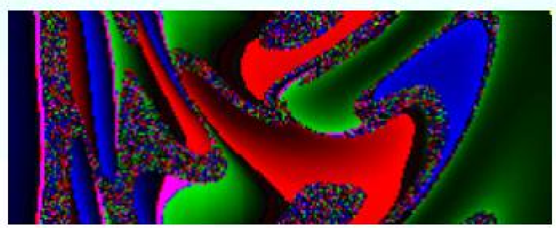
Poincaré e la nascita del mondo nonlineare

I sistemi *buoni* e quelli *cattivi*

Integrabilità e non integrabilità

Il problema dei 3 corpi di Poincarè

La nascita della fisica nonlineare



La dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali

Le equazioni di Newton sono nonlineari e, in generale, presentano una forte (esponenziale) dipendenza dalle condizioni iniziali. In altri termini soluzioni con condizioni iniziali “vicine” si allontano l’una dall’altra esponenzialmente al passare del tempo.

Ma quella che é una semplice osservazione matematica viene ad avere importanti conseguenze fisiche. Infatti, dal punto di vista fisico, é impossibile determinare posizione e velocitá con ASSOLUTA PRECISIONE.

In altre parole, a parte le poche eccezioni (costituite dai sistemi integrabili) il moto classico di N particelle puntiformi é, di fatto, non deterministico.

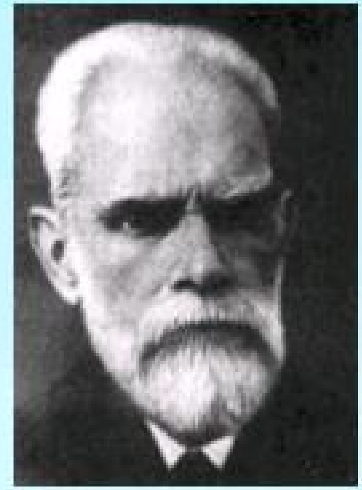
Il coefficiente di Lyapunov

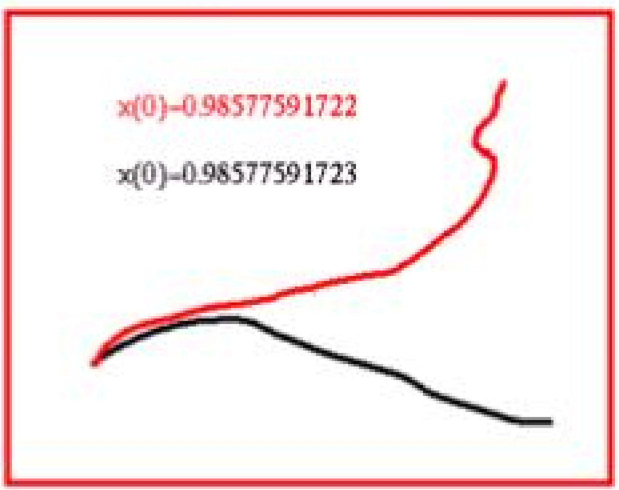
Cosa significa dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali? Si introduce, un vettore $\vec{u} = (..., x_i, y_i, z_i, v_i^x, v_i^y, v_i^z, ...)$ e si misura come cresce la sua distanza, nel tempo, da un vettore a lui vicino. Dati $\vec{u}$ e $\vec{u}'$, sia $d(0) = ||\vec{u} - \vec{u}'||$ la distanza iniziale nello spazio delle fasi. Allora si trova che, in generale,

$$d(t) = d(0)\, e^{\lambda t}$$

ove λ é un coefficiente positivo, detto esponente di Lyapunov, che misura la divergenza esponenziale delle orbite. Fisicamente, l'"errore" iniziale nella determinazione del punto $d(0)$ viene amplificato esponenzialmente nel tempo fino a perdere completamente ogni memoria del dato iniziale.

Il Crollo della fiducia nel meccanicismo: la dipendenza esponenziale dalle condizioni iniziali (l'esponente di Lyapunov)





$$d(t) = d(0)e^{\lambda t}$$

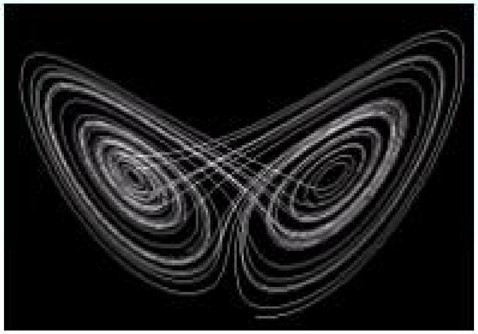
Effetto Butterfly

Un altra possibile fonte di caos é costituita dalla conoscenza effettiva di tutte le forze in gioco.

La complessa realtá fisica viene esemplificata con modelli matematici le cui soluzioni sono note esattamente. L'introduzione di altre piccole interazioni (perturbazioni) non sempre provoca una piccola deviazione dalla soluzione imperturbata. Puó capitare che l'aggiunta di una piccola perturbazione perturbi in modo consistente il moto rendendolo completamente diverso dal moto “matematicamente” perfetto (Effetto Butterfly).

L'Effetto Butterfly

La presenza di interazioni nonlineari provoca genericamente una dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali, nel senso che una piccola perturbazione può avere, dopo un certo tempo, un effetto molto grande. Il tempo dopo il quale ciò accade dipende da molti parametri, quali il tipo di sistema o di nonlinearità.
La sua esistenza, confermata dalla nostra esperienza quotidiana rappresenta una verifica a posteriori della bontà del modello.



Dalla Meccanica Newtoniana alla Termodinamica

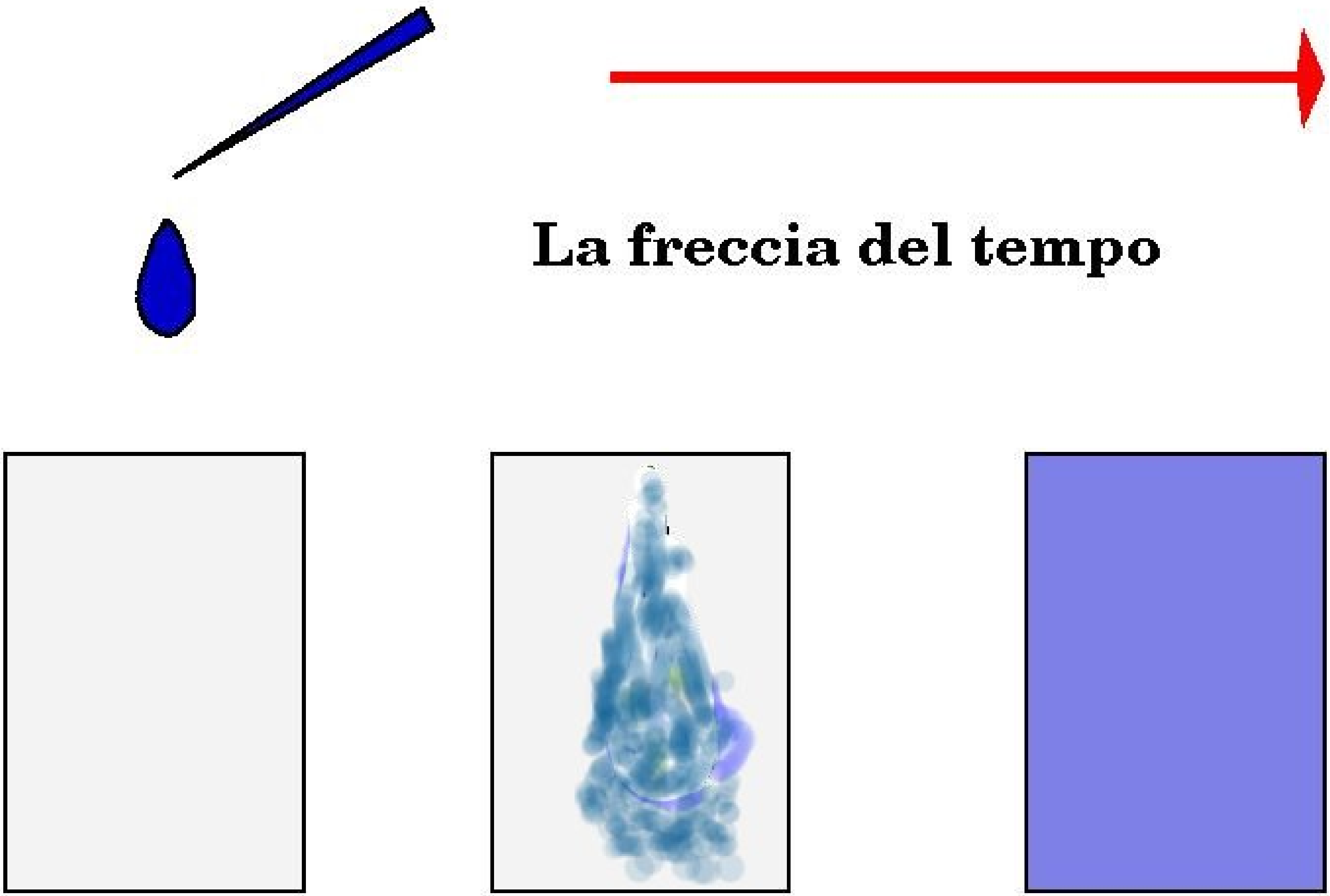
L’ipotesi atomica: la materia (ad esempio un gas), é costituita da tante, piccole, particelle (atomi) soggette alle leggi del punto di Newton.

La Termodinamica: e' una teoria fisica che descrive e studia lo scambio di calore tra oggetti macroscopici.

La Meccanica Statistica: e' una teoria fisica che si propone di ottenere le leggi macroscopiche partendo dalle leggi microscopiche, in questo caso, quelle di Newton.

Domanda legittima: é sufficiente scrivere le equazioni microscopiche di Newton per ottenere, ad esempio l'equazione di stato, dei gas $PV = nRT$ macroscopica o, magari, il secondo principio della termodinamica?

Reversibilita' ed Irreversibilita'

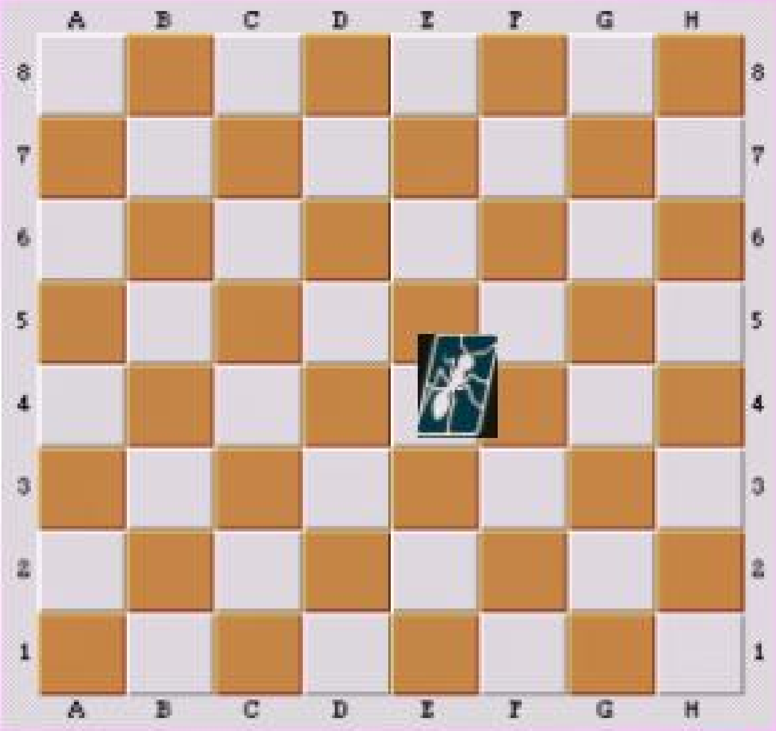


- **Le equazioni di Newton sono *invarianti* rispetto ad una inversione del segno del tempo : ovvero sono reversibili.**
- **Certi processi che avvengono in natura mostrano che esiste una direzione privilegiata del tempo, ovvero sono irreversibili.**
- **Come possono leggi del moto reversibili dare luogo a processi evolutivi irreversibili?**

MA C'E' DI PEGGIO

IL Teorema di ricorrenza di Poincarè

Ogni sistema di particelle, soggetto alle leggi della meccanica classica ritorna arbitrariamente vicino allo stato iniziale, pur di attendere un tempo sufficientemente lungo.



Il punto di vista di Boltzmann

Uno stato fisico macroscopico é caratterizzato da certi valori assunti da variabili macroscopiche. Ad ogni tale stato corrispondono in realtà moltissime configurazioni microscopiche che ”realizzano” in media il comportamento macroscopico.

Un sistema raggiunge l’equilibrio quando rende massimo il numero degli stati microscopici a propria disposizione.

E’ possibile definire una grandezza, detta entropia, che descrive il comportamento verso l’equilibrio dei sistemi. Essa ha una due definizioni: macroscopica (variazione di)

$$\Delta S = \frac{\delta Q}{T}$$

e statistico-microscopica :

$$S = k_B \ln \Omega$$

Un sistema raggiunge l’equilibrio termodinamico quando la sua entropia diventa massima

Dialogo immaginario tra Boltzmann e Zermelo-Loschmidt

B: Partendo dalle leggi di Newton con alcune semplici e plausibili ipotesi (il caos molecolare) posso descrivere il comportamento irreversibile dei fenomeni naturali.

Z-L: (A priori) E' sicuramente sbagliato. Se ad un certo istante si invertono tutte le velocitá delle particelle, il sistema dovrebbe ritornare al punto di partenza (secondo Newton) mentre non si é mai visto del calore fluire naturalmente da un corpo freddo ad uno caldo.

B: Beh, se ci riesci provaci ad invertire il tempo...

Z-L: In effetti non serve, basta aspettare il tempo di Poincaré ed ogni sistema meccanico, come la goccia di inchiostro nell'acqua, ritorna goccia... che ne dici?

B: Dico che se immergi una goccia di inchiostro in un bicchiere d'acqua allora dovresti aspettare un tempo molto piú grande dell'etá dell'universo... La configurazione acqua+goccia é altamente improbabile rispetto alla configurazione acqua colorata.

Z-L: E tu credi veramente che l'acqua si separi miracolosamente dall'inchiostro, prima o poi?

B: *If at an intermediate stage we reverse all velocities we get an exceptional state where H increases for a certain time and decreases again. But the existence of such cases does not disprove our theorem. On the contrary the theory of probability itself shows that the probability of such cases is not mathematically zero, only extremely small*

e voi, cosa credete ?

Il punto di vista probabilistico

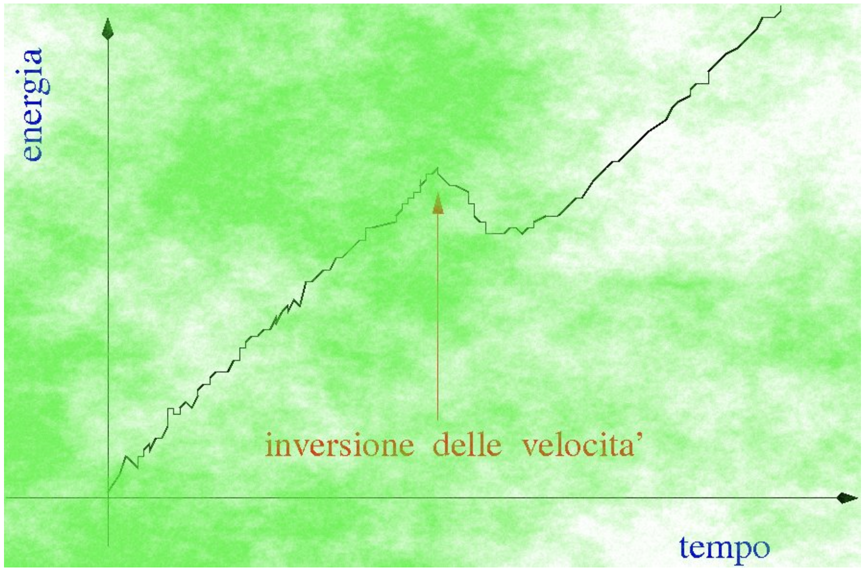
Boltzmann introduce qui 3 punti essenziali per capire come può una dinamica microscopica reversibile dare origine ad una dinamica macroscopica irreversibile

- MACROSCOPICO-MICROSCOPICO: Un sistema macroscopico è enormemente più grande di uno microscopico.

- LE CONDIZIONI INIZIALI: Non solo le equazioni differenziali determinano l’evoluzione del sistema ma anche e soprattutto le condizioni iniziali.
- IL CONCETTO DI PROBABILITA’: Non tutti gli stati microscopici evolveranno in accordo con il secondo principio ma solo la “maggioranza” di essi.

Puó allora il caos microscopico, originato dalle interazioni nonlineari tra le varie particelle, costituire una base fisica del meccanismo macroscopico dell'irreversibilitá?

Infatti, il moto di un generico sistema caotico non è reversibile!



La standard map

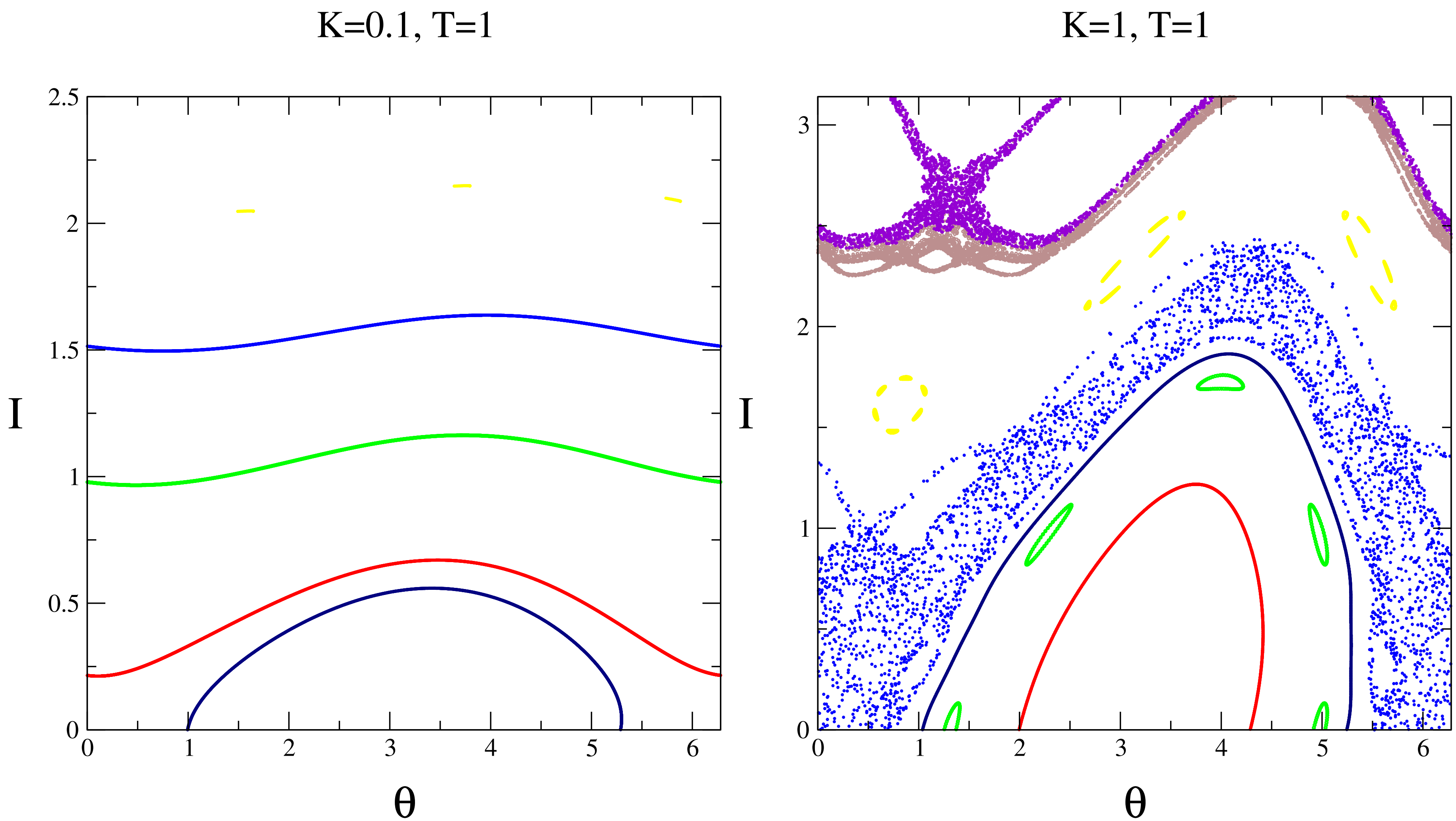
Fisicamente rappresenta un pendolo che ruota attorno ad un centro fisso che viene scalciato periodicamente, con periodo T, da una forza sinusoidale (ovvero da una energia potenziale del tipo $k \cos\theta$... come quella del pendolo). La mappa che descrive il comportamento delle variabili prima e dopo il calcio é :

$$\begin{cases} I' = I + k \sin\theta \\ \theta' = \theta + I'T \end{cases} \tag{1}$$

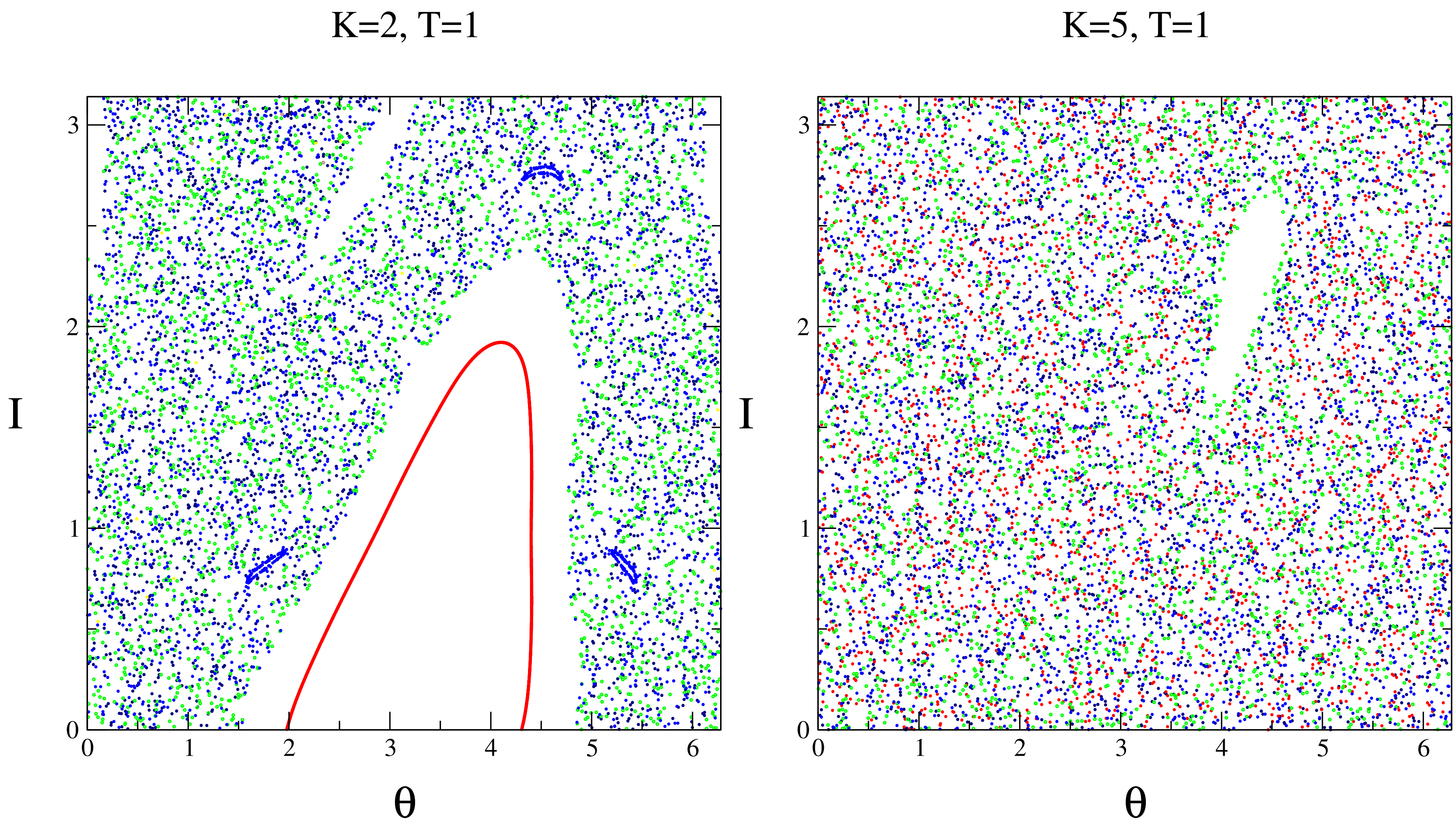
Un qualsiasi programma di calcolo permette di calcolare facilmente i nuovi valori di (I, θ), dati i vecchi valori. Ad ogni iterazione converrá anche prendere il valore di θ modulo 2π (visto che compare solo all'interno della funzione 2π periodica $\sin$). Inoltre é facile vedere che anche I puó essere preso modulo $2\pi/T$ visto che le equazioni (**??**) sono invarianti rispetto alla sostituzione simultanea $I \rightarrow I + 2\pi/T$ e $I' \rightarrow I' + 2\pi/T$. In questo modo si ottiene una mappa sul toro.

In seguito basta far disegnare, in un quadrato $(0, 2\pi) \times (0, 2\pi)$ un puntino ad ogni iterazione tenendo un solo colore per ogni diversa condizione iniziale.

Il parametro che descrive il grado di caos di questa mappa é il prodotto kT. Vediamo alcuni esempi.



K=0.1, T=1
K=1, T=1
I
θ
0
0.5
1
1.5
2
2.5
1
2
3
4
5
6


K=2, T=1
K=5, T=1
I
I
θ
θ
0
1
2
3
4
5
6
0
1
2
3

Conclusioni

- La realtà fisica può essere descritta convenientemente da modelli matematici. Il modello matematico ha necessariamente dei limiti che non possono estrapolati liberamente alla complessa realtà fisica.
- Al determinismo "matematico" delle equazioni di Newton fa riscontro un indeterminismo della realtà fisica. Ciò è spiegabile anche in senso matematico!
- Il caos non complica la vita, al contrario, rende possibile una analisi probabilistica dei sistemi complessi. In questo modo anche sistemi costituiti da poche particelle, ma caotici, possono essere analizzati in temini probabilistici.

- E' improprio parlare di teoria del caos semplicemente perchè non esiste un modo unico di analizzare e compredere i sistemi nonlineari. Esistono invece degli strumenti, analitici e numerici, per studiare i sistemi cosiddetti "complessi", i quali sembrano però sfuggire ad ogni nostro tentativo di formalizzazione.

GRAZIE PER L'ATTENZIONE

F.BORGONOVI@DMF.UNICATT.IT

WWW.DMF.UNICATT.IT/~BORGONOV